JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 16, 43–47 (1976)

Zur Approximation durch Polynome mit ganzen Koeffizienten

HELMUT MÜLLER

I. Mathematisches Institut, Freie Universität Berlin, D-1000, Berlin 33, Germany

1. Der klassische Satz von Weierstraß gibt eine einfache Bedingung für die Approximierbarkeit einer reellwertigen Funktion durch Polynome mit i.a. reellen Koeffizienten. Läßt man dagegen zur Approximation nur Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten, kurz: ganze Polynome, zu, so wird man nicht erwarten können, daß so jede stetige Funktion beliebig genau angenähert werden kann. In der Tat gibt es zu diesem Problemkreis eine umfangreiche Literatur (siehe z.B. [2]). Ganze Approximationspolynome finden u.a. auch bei Transzendenzuntersuchungen Verwendung.

Mit einfachen und auf Tschebyscheff zurückgehenden Mitteln läßt sich das bemerkenswerte Resultat erzielen, daß in Intervallen, deren Länge größer gleich 4 ist, nur ganze Polynome selbst durch ganze Polynome approximiert werden können [siehe z.B. 1]. Interessant bleiben damit nur Intervalle mit einer Länge kleiner als 4. Liegt dieses Intervall I in $[-2, +2]$, so lassen sich nach Hewitt und Zuckermann [2] n Punkte in I explizit so angeben, daß eine in I stetige Funktion f dort durch ganze Polynome genau dann approximiert werden kann, wenn das zu diesen Punkten gebildete Lagrangesche Interpolationspolynom $L_n f$ ganz ist. Da die bisher verwendeten Beweismethoden nicht konstruktiv sind, ist die Frage nach der expliziten Konstruktion von ganzen Approximationspolynomen offen.

Dieses Problem wird in der vorliegenden Arbeit untersucht. Dabei werden ganze Interpolationspolynome angegeben, die unter bestimmten Voraussetzungen in Intervallen $I \subset [-2, +2]$ gegen die vorgelegte Funktion konvergieren. In dem abschließenden Abschnitt wird gezeigt, daß eine der geforderten Bedingungen nichttriviale Lösungen zuläßt. Im Intervall $[-a, +a]$ mit $0 < a < 1$ kommt man ohne Zusatzbedingungen aus, wenn man den Beweis eines Satzes von Pál ([4], [1]) mit Bernstein Polynomen führt.

2. Wie man aus der expliziten Darstellung des n-ten Tschebyscheff–Polynoms

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k}$$

Copyright © 1976 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

ersieht, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\omega_n(x) = 2T_n(x/2)$ ganz. Die n Nullstellen von $\omega_n[x_k = 2\cos(\pi((2k-1)/2n)), k = 1,..., n]$ liegen mit wachsendem Index n in $[-2, +2]$ dicht.

Da für jedes ganze Polynom p und jedes $n \in \mathbb{N}$ das Lagrangesche Interpolationspolynom

$$L_n p = \sum_{k=1}^{n} p(x_k)\, l_k$$

mit den Grundpolynomen

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)}, \qquad k = 1,..., n,$$

mit dem modulo ω_n reduzierten übereinstimmt, ist $L_n p$ ganz.

HILFSSATZ 1. *Es sei f in $[-a, +a]$ mit $0 < a < 2$ durch ganze Polynome approximierbar. Wird $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $x_k \in [-a, +a]$ gilt für $k = 1,..., n$, so ist $L_n f$ ganz.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein ganzes Polynom p_ϵ mit $|f(x_k) - p_\epsilon(x_k)| < \epsilon$ für $k = 1,..., n$. Daher gilt

$$\begin{aligned} |L_n f(x) - L_n p_\epsilon(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - p_\epsilon(x_k)| \cdot |l_k(x)| \\ &\leqslant \epsilon C \end{aligned}$$

mit einer von ϵ unabhängigen Konstanten $C > 0$. Da die Grade beider Interpolationspolynome beschränkt bleiben, folgt $L_n f = L_n p_\epsilon$ für genügend kleines ϵ und damit die Behauptung. Die von a abhängige Konstante C wird durch den folgenden Hilfssatz abgeschätzt.

HILFSSATZ 2. *Setzt man für $n \in \mathbb{N}$*

$$\lambda_n = \operatorname*{Max}_{|x| \leqslant 2} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|,$$

so gilt

$$\lambda_n = O(\ln n) \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Beweis. Wegen $\omega_n(x) = 2T_n(x/2)$ ist

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \operatorname*{Max}_{|x| \leqslant 2} \sum_{k=n}^{n} \frac{|T_n(x/2)|}{|T_n'(x_k/2)|\,|(x_k/2) - (x/2)|} \\ &\leqslant 8 + \frac{4}{\pi} \ln n \end{aligned}$$

nach Bernstein (siehe [3, Satz 390]).

Wird mit $\omega(f, \delta)$ der Stetigkeitsmodul einer Funktion f bezeichnet und erfüllt f in $[-a, +a]$ die Dini–Lipschitz–Bedingung, d.h. es gilt

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f, \delta) \ln \delta = 0,$$

so folgt mit dem Satz von Jackson [3, Satz 112] $\lim_{n\to\infty} E_{n-1} \ln n = 0$, wenn mit E_n die beste Approximation von f durch Polynome von höchstens n-tem Grad bezeichnet wird. Zusammen mit Satz 1 aus [3, Satz 389] und Hilfssatz 2 ergibt sich, daß die Polynome $L_n f$ in $[-a, +a]$ gleichmäßig gegen f konvergieren. Mit Hilfssatz 1 ist damit bewiesen:

SATZ 1. *Eine in* $]-2, +2[$ *stetige Funktion* f *erfülle folgende Voraussetzungen*:

(1) *f läßt sich in jedem Intervall $[-a, +a]$ mit $0 < a < 2$ gleichmäßig durch Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten approximieren*;

(2) *in einem Intervall $I = [-a, +a]$ mit $0 < a < 2$ genüge f der Dini–Lipschitz-Bedingung.*

Dann streben in I die ganzen Polynome $L_n f$, die zu

$$x_k = 2 \cos \pi((2k - 1)/(2n))$$

mit $k = 1,..., n$ gebildet sind, gleichmäßig gegen f.

3. Wählt man statt der Nullstellen die Extremalstellen von T_n als Interpolationsknoten, so ist ebenfalls $\omega_{n-1}(x) = (1/n)\, T_n'(x/2)$ ganz, wie man aus der expliziten Darstellung von T_n ersieht. Sämtliche Nullstellen von ω_{n-1} liegen im Intervall $[-2, +2]$ und sind von der Form $x_k = 2 \cos(k\pi/n)$ mit $k = 1,..., n - 1$. Bezüglich der Konvergenz der zu diesen x_k gebildeten Interpolationspolynome gilt folgender

HILFSSATZ 3. *Es sei F in $]-1, +1[$ stetig und in $[-A, +A]$ mit $0 < A < 1$ von beschränkter Variation. Dann streben in $[-A, +A]$ die zu $\tilde{x}_k = \cos(k\pi/n)$, $k = 1,..., n - 1$ gebildeten Lagrange-Interpolationspolynome $L_{n-1}F$ gleichmäßig gegen F.*

Beweis. Man erhält dieses Ergebnis durch eine leichte Modifikation des Beweises zu Satz 5.3 in [5, Satz 129], indem man die Eckpunkte -1 und $+1$ wegläßt.

Geht man von einer in $]-2, +2[$ stetigen Funktion f aus, die in $[-a, +a]$ mit $0 < a < 2$ von beschränkter Variation ist, so erfüllt $F(x) = f(2x)$ gerade die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 mit $A = a/2$. Folglich streben

$L_{n-1}F$ in $[-A, +A]$ und dann auch $L_{n-1}f$ in $[-a, +a]$ gleichmäßig gegen F bzw. gegen f.

Läßt sich f in dem Intervall $[-a, +a]$ mit $0 < a < 2$ durch ganze Polynome approximieren, so folgt, da ω_n ganz ist, wie in Hilfssatz 1 die Ganzheit von $L_{n-1}f$, wenn $x_k \in [-a, +a]$ gilt für $k = 1,..., n-1$. Insgesamt ist damit bewiesen:

SATZ 2. *Eine in* $]-2, +2[$ *stetige Funktion* f *erfülle folgende Voraussetzungen*:

(1) f *läßt sich in jedem Intervall* $[-a, +a]$ *mit* $0 < a < 2$ *gleichmäßig durch Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten approximieren*;

(2) f *sei in* $I = [-a, +a]$ *mit* $0 < a < 2$ *von beschränkter Variation.*

Dann streben in I *die ganzen Polynome* $L_{n-1}f$, *die zu den Knoten*

$$x_k = 2\cos(k\pi/n), k = 1,..., n-1$$

gebildet sind, mit $n \to \infty$ *gleichmäßig gegen* f.

Bemerkungen. (1) Nimmt man die Eckpunkte -1 und $+1$ hinzu, so geht bei der Transformation $x \to x/2$ die Ganzheit des Nullstellenpolynoms ω_{n+1} verloren.

(2) Der durch die in [5, Satz 132] angegebenen Stufenpolynome, die für jede stetige Funktion f gleichmäßig gegen f konvergieren, definierte Projektor ist nicht nur nicht polynomtreu, sondern kann auch ganze Polynome auf nicht ganze abbilden.

4. In diesem Abschnitt soll angedeutet werden, daß es stetige Funktionen gibt, die die Voraussetzung (1) der obigen Sätze erfüllen, ohne selbst ein Polynom zu sein.

Dazu wähle man eine monoton gegen $+2$ strebende Folge a_n mit

$$0 < a_n < 2,$$

eine rationale, aber nicht ganze Zahl $y \in [-a_1, +a_1]$, ein beliebiges ganzes Polynom p_0 und eine irrationale Zahl z mit $|p_0(y) - z| < \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$. Da y kein Interpolationsknoten bei dem Test von Hewitt und Zuckermann ist, läßt sich ausgehend von p_0 eine in $[-a_1, +a_1]$ stetige Funktion f_1 so konstruieren, daß sie in $[-a_1, +a_1]$ durch ganze Polynome approximierbar bleibt und noch $|f_1(x) - p_0(x)| < 2\epsilon_0$ für $x \in [-a_1, +a_1]$ und $f_1(y) = z$ erfüllt. Um dies zu erreichen braucht man nur in einer genügend kleinen Umgebung von y f_1 linear zu definieren und sonst $f_1(x) = p_0(x)$ zu setzen. Nun approximiere man in $[-a_1, +a_1]$ f_1 durch ein ganzes Polynom p_1 bis auf

$\epsilon_1 < \epsilon_0$. Dann gilt in $[-a_1, +a_1]$ die Ungleichung $|p_1(x) - p_0(x)| < 2\epsilon_0 + \epsilon_1$. Da p_1 trivialerweise auch in $[-a_2, +a_2]$ durch ganze Polynome angenähert werden kann, setze man das Verfahren durch analoge Bildung einer in $[-a_2, +a_2]$ stetigen Funktion f_2 mit $f_2(y) = z$ und $|f_2(x) - p_1(x)| < 2\epsilon_1$ für $x \in [-a_2, +a_2]$ fort. Diese approximiere man in $[-a_2, +a_2]$ durch ein ganzes Polynom p_2 bis auf ϵ_2. Dann gilt dort $|p_2(x) - p_1(x)| < 2\epsilon_1 + \epsilon_2$.

So fortfahrend erhält man eine Folge von ganzen Polynomen p_n, die in jedem Intervall $[-a, +a]$ mit $0 < a < 2$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, wenn man für $\epsilon_n > 0$ eine monotone Nullfolge mit $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty$ wählt.

Da $|p_n(y) - z| = |p_n(y) - f_n(y)| < \epsilon_n$ gilt, folgt $f(y) = z$, so daß f kein ganzes Polynom sein kann. Dann ist f auch kein Polynom mit reellen Koeffizienten, denn wählt man a so groß, daß mehr Interpolationsknoten x_k aus Satz 1 in $[-a, +a]$ liegen als der Grad von f beträgt, so folgt $L_n f = f$ und nach Hilfssatz 1 wäre f doch ganz.

References

1. L. B. O. Ferguson, Some remarks on approximation by polynomials with integral coefficients, *in* "Approximation Theory," (A. Talbot, Ed.), pp. 59–62, Academic Press, New York, 1970.
2. E. Hewitt and H. S. Zuckermann, Approximation by polynomials with integral coefficients, a reformulation of the Stone–Weierstrass theorem, *Duke Math. J.* **26** (1959), 305–324.
3. I. P. Natanson, "Konstruktive Funktionentheorie," Akademie-Verlag, Berlin, 1955.
4. J. Pál, Zwei kleine Bemerkungen, *Tohoku Math. J.* **6** (1914–1915), 42–43.
5. A. Schönhage, "Approximationstheorie," Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1971.